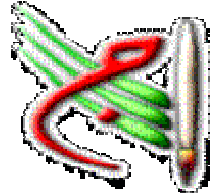


République Algérienne Démocratique Et Populaire
Ministre De L'enseignement Supérieur Et de La
Recherche Scientifique
Université De Bechar



Institut : Sciences exactes

Département : Informatique

Filières : 5 Informatique /N6

Module : info 43

Réseaux de Petri

➤ *Présenté Par :*

➤ *Khaouid Ali*

➤ *Elalaoui Abd errahmanne*

Charge module :

Mr.Larbi

Sommaire

1. Introduction	P1
2. Définition d'un réseau de Pétri	P1
3. Concepts et définitions	P2
4. Marquage d'un RdP	P3
5. Représentation matricielle d'un RdP	P3
6. Classes des Réseaux de Pétri	P4
7. Animation du graphe	P5
8. Equation fondamentale de franchissement	P6
9. Dynamique des réseaux de Pétri	P6
10. Graphes de marquage ou graphe d'accessibilité	P7
11. Propriétés principales	P8
12. Application des RdPs	P12
13. Caractéristiques principales des réseaux de Pétri	P14
14. Conclusion	P15
15. Bibliographie	P16

1. Introduction

Le réseau de Pétri est créé par Carl Adam Pétri (thèse de 1962) afin de modéliser la composition et la communication entre automates. C'est une représentation graphique. Le premier modèle appelé RdP C-E (condition- événement) reposait sur l'utilisation des valeurs booléennes (Vrais ou Faux).





Les RdP P-T (place –transition) généralisent les RdP C-E en manipulant des valeurs entières.

Les trois familles de RdP sont:

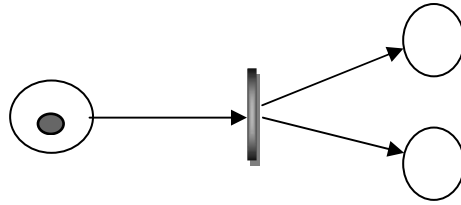
- RdP discret (RdP P-T et ses dérivées), pour modéliser les comportements se représentant par des graphes d'états finis.
- RdP continu (RdP temporelle RdP T), pour les comportements qui nécessitent la prise en considération des temps.
- RdP stochastique (RdP S et ses dérivés), on inclue des distributions de franchissement et conduisent à des processus stochastiques (exemple chaîne de Markov).

2. Définition d'un réseau de Pétri

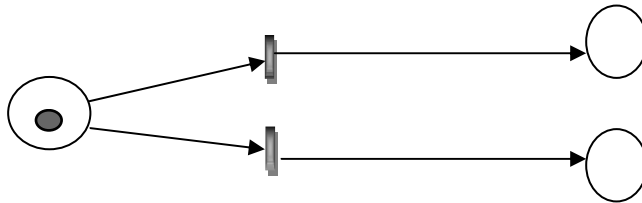
Un réseau de Pétri est un outil mathématique très général permettant de modéliser le comportement d'un système dynamique à événement discret. C'est un modèle graphique défini par:

P_n 	Un ensemble de places, représentées graphiquement par des cercles et correspondant aux différents états du système.
t_n 	Un ensemble de transitions, notées représentées par des barres ou rectangle et représente le changement d'état.
	Un ensemble d'arcs, notées représentées par des flèches et reliant les places et les transitions. à chaque arc est associé un nombre appelé "Poids de l'arc".
	une distribution des jetons dans les places.

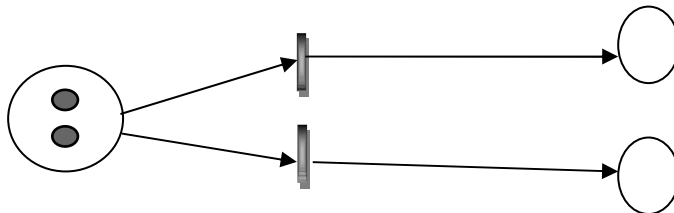
Observez la différence :



Après la transition, des jetons seront mis dans les deux places suivantes et il y aura traitement parallèle dans les deux directions.



Après la transition, un seul jeton sera mis dans une seule des deux places suivantes (l'une ou l'autre) et une seule branche sera exécutée.



Nous avons deux jetons, donc deux transitions sont possibles: ceci serait ou bien l'une puis l'autre ou bien deux fois une des deux.

3. Concepts et définitions

Formellement, un RdP est un quadruplet, $P_N = (P, T, \text{Pré}, \text{Post})$ où;

$P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ est un ensemble fini de places,

$T = \{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ est un ensemble fini de transitions,

$\text{Pré} : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, (précède) une application d'incidence avant ou $\text{Pré}(P,T)$ qui contient la valeur entière " n " associée à l'arc allant de " P " à " T ".

$\text{Post} : P \times T \rightarrow \mathbb{N}$, (suit) une application d'incidence arrière ou $\text{Post}(P,T)$ qui contient la valeur entière " n " associée à l'arc allant de " T " à " P ".

Càd " P " est une place d'entrée de la transition " T " si $\text{Pré}(P,T) > 0$.

4. Marquage d'un RdP.

Pour définir l'état d'un système modélisé par un RdP, on doit le compléter par un marquage. La distribution des jetons dans le graphe donne le marquage. Un marquage se définit par un vecteur $M=\{m_i\}$, avec m_i est le nombre de jetons dans P_i .

Dans l'Figure 1, $M_0=[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$

Dans l'Figure 1 avant trie, $M_n=[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$

5. Représentation matricielle d'un RdP.

Deux matrices Pré et Post sont construites pour représenter un RdP; les colonnes et les lignes représentent respectivement les places et les transitions. L'intersection (i,j) dans Pré \rightarrow coût associé à l'arête P_i à T_j . L'intersection (i,j) dans Post \rightarrow coût associé à l'arête T_i à P_j .

Exemple :

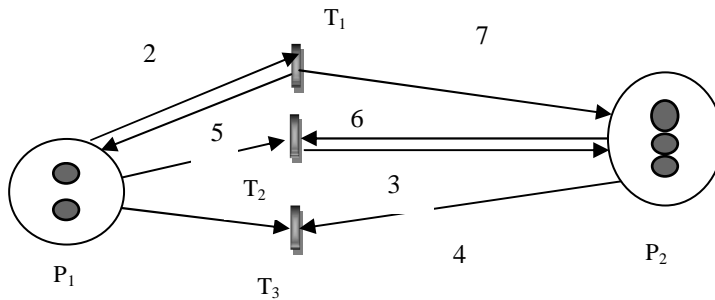


Figure 1

↶	T1	T2	T3
P1	2	1	0
P2	0	6	4

Matrice Pré

↷	T1	T2	T3
P1	5	0	1
P2	7	3	0

Matrice Post

6. Classes des Réseaux de Pétri

	<p>RdP <i>ordinaire</i>: si les poids de tous les arcs sont unitaires (=1).</p>
	<p>RdP à <i>arc étiquetés</i>: chaque arc porte les jetons qui le traverse lors d'un tri de transition</p>
	<p>RdP <i>interprété</i>: chaque transition porte un prédicat des variables d'entrée.</p>
	<p>RdP <i>temporisé</i>: on intègre au RdP la variable temps. <i>Synchronisation</i>: c'est la conjonction de deux places.</p>
	<p><i>Graphe d'événement</i>: c'est un RdP dans lequel chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. $\forall p \in P, \bullet p = p \bullet = 1$ $\bullet p$ indique la transition avant p et $p \bullet$ indique la transition après p. \implies le graphe d'evt peut modéliser la synchronisation (ET, conjonction) et non le conflit (OU, disjonction).</p>
	<p><i>Machine d'état</i>: c'est un RdP dans lequel chaque transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie. $\forall t \in T, \bullet t = t \bullet = 1$ $\bullet t$ indique la place avant t et $t \bullet$ indique la place après t. \implies la machine d'état peut modéliser le conflit (OU, disjonction) et non la synchronisation (ET, conjonction).</p>
	<p>Réseau à <i>choix libre</i>: c'est un RdP dans lequel un arc d'origine d'une place est le seul arc qui sort de cette place OU il est le seul arc qui entre dans une transition (on impose ce qui sort du p uniquement). $\forall T_j \in T, \forall P_i \in \bullet T_j, \bullet T_j = \{P_i\}$ ou $P_i \bullet = \{T_j\}$ \implies on est libre de faire un choix.</p>

Autres RdP: Réseau à choix libre étendu; à choix asymétrique etc...

7. Animation du graphe

7.1. Sensibilisation d'une transition

Pour un marquage M , une transition est dite tirable (ou franchissable ou sensibilisée) ssi $\forall p \in P, on a M(p) \geq Pré(p,t)$

Càd, pour toute place p_i entrée de t_j , le nombre de jetons dans p_i ($M(p_i)$) est supérieur ou égal au poids de l'arc allant de p_i à t_j .

7.2. Notation

"t" tirable depuis M, se note " $M [t >$ ".

Le tir de "t" depuis "M1" donnant le nouveau marquage "M2" se note

"M1 [t > M2".

Remarque

- Il n'y a pas, à priori, conservation du nombre de jetons dans un graphe.
- Dans un RdP, toute transition tirable "t", peut être tirée, et son tir conduit à un nouveau marquage M' défini par:

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) - Pré(p,t) + Post(p,t)$$

Exemple :

A partir de M_0 de la figure 5, on tire T_1 , le nouveau marquage M sera:

$$M = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$M_0 [t_1 > M,$

7.3. Matrice d'incidence

C'est une matrice notée "C", définie par:

$$\forall p \in P, \forall t \in T, C(p,t) = Post(p,t) - Pré(p,t)$$

D'où $M(p) = M_0(p) + C(p,t)$

Exemple :

Même donnée que l'exemple.

$$C = Post - Pré = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix}, \text{ et}$$

$$M = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

8. Equation fondamentale de franchissement

Etant donnée une situation où: $M_0[t_1 > M_1; M_1[t_2 > M_2; \dots; M_n[t_{n+1} > M'$;

L'équation fondamentale de franchissement est $M' = M_0 + C \cdot \bar{S}$

\bar{S} étant le vecteur caractéristique de franchissement des transitions,

$$S = t_1 \ t_2 \ \dots \ t_{n+1}$$

L'élément $\bar{S}(t_i)$ donne le nombre d'occurrence de la transition "ti" dans la séquence "S".

On note le marquage après la séquence S: $M_0 [S > M'$.

Exemple :

Calculer le nouveau marquage M' induit par le franchissement de la séquence $S = t_1 \ t_2 \ t_3 \ t_1$, dans le RdP de la figure 4.

$$M_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{S} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M' \text{ est donc } \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

9. Dynamique des réseaux de Pétri $M'(p) = M(p) - |\bullet t|$

La dynamique d'un réseau de Pétri est décrite par les changements de marquage dans le RdP.

"Pour passer de M à M' , on enlève des places d'entrée un nombre de jetons équivalent au poids de l'arc qui relie cette place à la transition tirée et on ajoute dans la place de sortie un nombre de jetons équivalent au poids de l'arc qui relie la transition tirée à cette place".

La dynamique est définie alors par:

$$1- \forall p \in \{\bullet t\} \quad M'(p) = M(p) - |\bullet t|$$

Avec $\{\bullet t\}$ l'ensemble des places précédentes à t ; $|\bullet t|$ indique le poids de l'arc qui relie p à t .

$$2- \forall p \in \{t \bullet\} \quad M'(p) = M(p) + |t \bullet|$$

Avec $\{t \bullet\}$ l'ensemble des places suivantes à t ; et $|t \bullet|$ indique le poids de l'arc qui relie t à p .

$$3- \forall p \notin \{t \bullet, \bullet t\} \quad M'(p) = M(p)$$

9.1. Cas d'un RdP interprété:

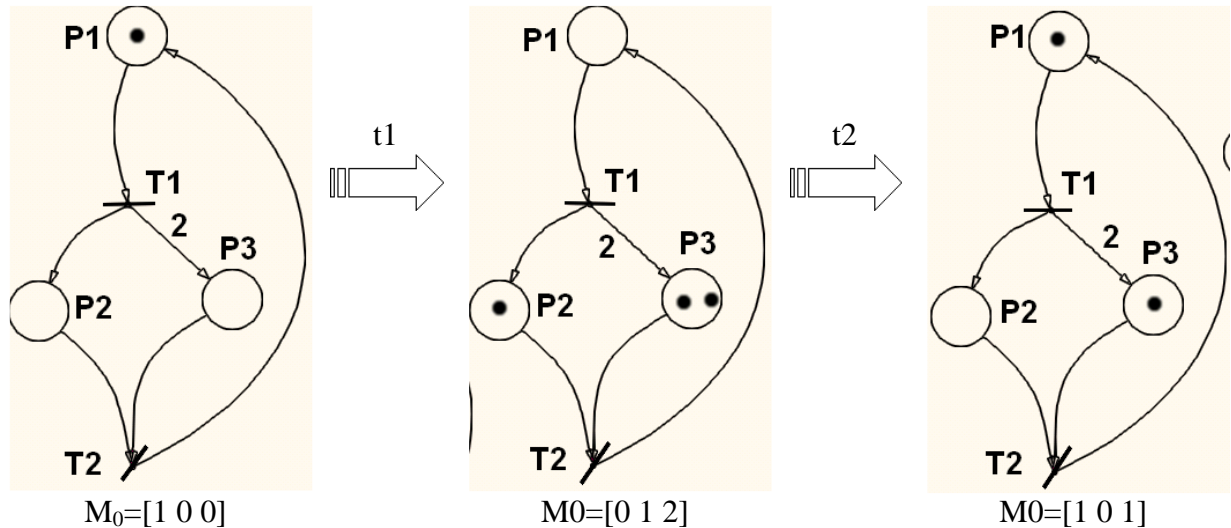
On a le tri d'une transition ssi:

Transition sensibilisée,

Prédicat vrai.

Exemple :

Changement de marquage dans un RdP selon une séquence de tirage $S=t_1 t_2$.



10. Graphes de marquage ou graphe d'accessibilité

L'évolution temporelle d'un RdP peut être décrite par un graphe de marquage représentant l'ensemble des marquages accessibles (ensemble des marquages accessibles et d'arcs correspondant aux franchissements des transitions) faisant passer d'un marquage à l'autre pour un marquage initial M_0 .

10.1. Graphe d'accessibilité

Un marquage M_j est accessible (ou atteignable) s'il existe une séquence de transitions S qui transforme le marquage en M_j .

Notation: $A(R, M_0)$ représente l'ensemble des marquages accessibles à partir de M_0 .

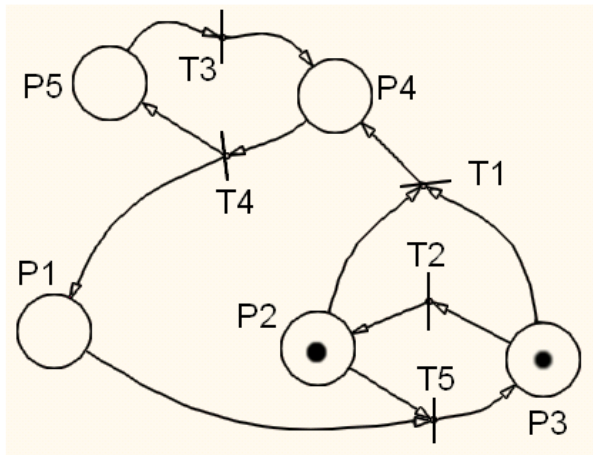
L'accessibilité est une propriété de haut intérêt parce qu'il est souhaitable de savoir si un état peut être atteint ou non. *Par exemple, dans une usine chimique, il est important de savoir s'il y a des états accessibles qui peuvent conduire à une explosion.*

10.2. Arbre de recouvrement

Pour un RdP avec un marquage initial M_0 , et un autre marquage M , il s'agit de déterminer s'il existe un marquage M' accessible, de telle sorte que $M' \geq M$ (M' recouvre M).

L'arbre de recouvrement permet de détecter les transitions qui ne sont pas tirées, ou qui ne sont plus tirées à partir d'un certain niveau.

Exemple : RdP et son arbre de recouvrement.



$M_0 = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \xrightarrow{T_2} [0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0]$
 blocage.
 $\downarrow T_1$
 $[0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$
 $\downarrow T_4$
 $[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$
 $\downarrow T_3$
 $[1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$
 $\downarrow T_4$
 $[2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$: croissance infinie

11. Propriétés principales

11.1. RdP borné: quand le nombre des jetons dans les places ne dépasse pas un nombre K .

Si $K=1$, le RdP est dit SAIN (ou sauf).

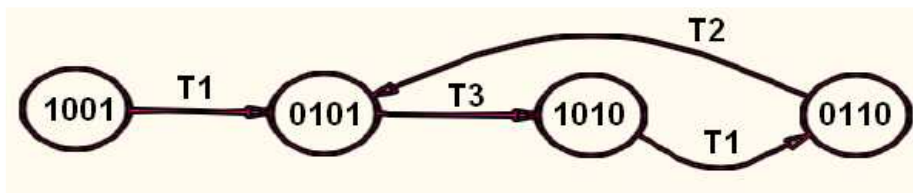
Pour un réseau R et un marquage M_0 , une place "p" est k- bornée ssi

$$\forall M \in A(R, M_0), M(p) \leq k$$

Dans le cas contraire la place "p" est dite "non- bornée".

Exemple :

Dans le RdP de l'exemple 10, et d'après le graphe de marquage ci-dessous, le RdP est sauf.



11.2. RdP pseudo- vivant

Si à tout instant, il existe une transition sensibilisée.

Càd, ceci se traduit par une absence de blocage.

$\forall M \in A(R, M_0), \exists t \in T / M[t >$; il existe toujours une transition qui puisse être franchie.

11.3. RdP quasi-Vivant

Si toutes ses transitions peuvent être franchies au moins une fois à partir d'un marquage initial M_0 .

Remarque: la transition qui n'est pas quasi-vivant st inutile.

Exemple :

Soit le RdP de la figure 5,

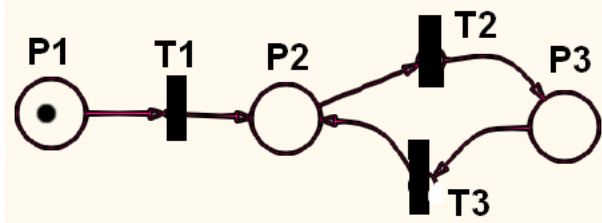


Figure 5.

Pour $M_0=[1\ 0\ 0]$, T1 est tirable au moins une fois, T2 et T3 forme une boucle, donc il existe au moins une transition tirable donc le RdP est Quasi-vivant et Pseudo- vivant. Pour $M_0=[0\ 1\ 0]$, T1 est non tirable, le RdP est non quasi vivant.

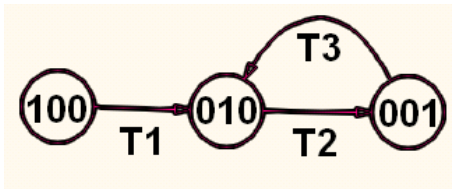
11.4. RdP Vivant

Si toutes les transitions peuvent être franchies (en d'autres termes, chaque transition est tirable éventuellement, peu importe l'état du système).

$\forall M \in A(R, M_0)$, il existe une séquence franchissable à partir de M qui contient toutes les transitions.

Exemple :

Même RdP de la figure 5. Le graphe de marquage est



Le RdP n'est plus vivant car à partir d'un certain moment il n'est plus possible de tirer T1.

Exemple 4

Soit le RdP de la figure 6,

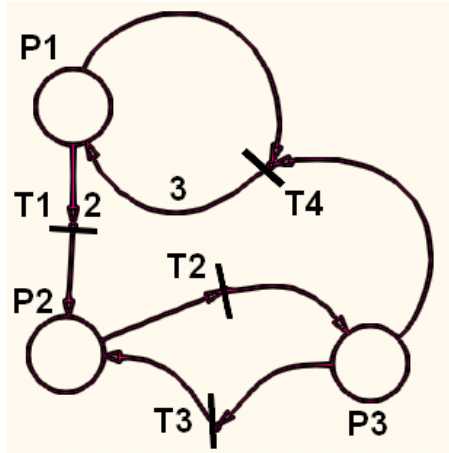
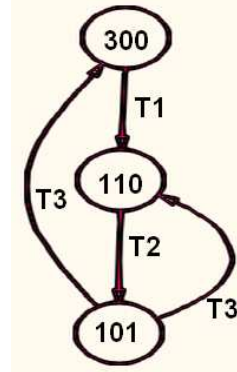


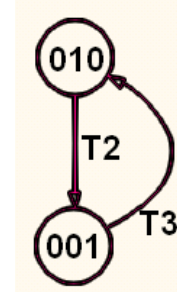
Figure 6.

Pour $M_0=[3\ 0\ 0]$,



le RdP est vivant,
donc quasi et pseudo
vivant.

Pour $M_0=[0\ 1\ 0]$,



RdP est pseudo
vivant.

11.5. RdP réinitialisable (ou réversible ou propre)

Il existe un cycle tel qu'à un moment donné, lors du fonctionnement, la configuration du réseau est la même qu'à l'état initial.

Remarque: la réversibilité est une notion liée à l'état initial M_0 .

$$\forall M \in A(R, M_0), \exists S \in T^*, / M[S > M_0$$

11.6. Absence de blocage

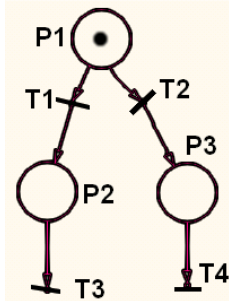
Le réseau a toujours la possibilité d'évolution (plus faible que vivant).

11.7. Marquage puit

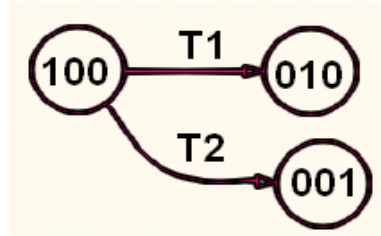
C'est un marquage à partir duquel aucune transition n'est tirable.

Remarque: RdP sans blocage équivalent à pour tout marquage, pas de marquage puit.

Exemple

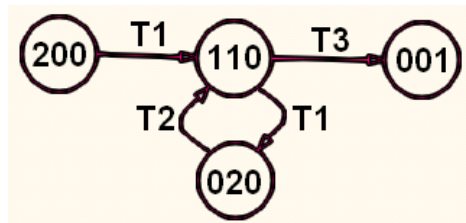
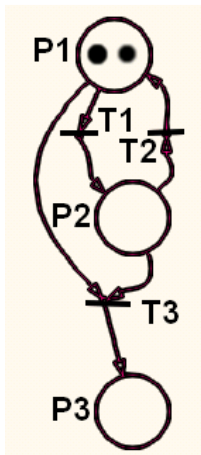


Grphe de marquage:



RdP Pseudo et Quasi vivant

Exemple



le RdP n'est pas pseudo vivant (blocage)

le RdP Quasi vivant

le RdP n'est pas vivant car contient le blocage.

11.8. Analyse des RdPs par le symbole ω (graphe de couverture)

Un arbre d'accessibilité peut être infini.

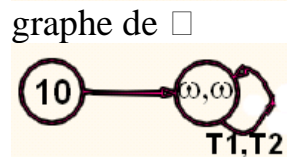
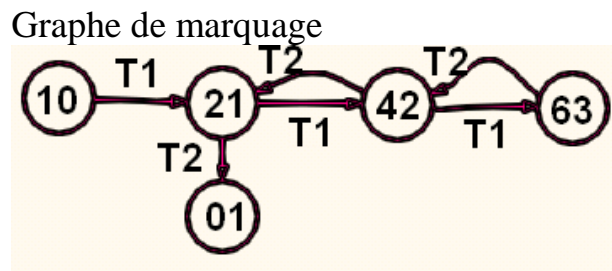
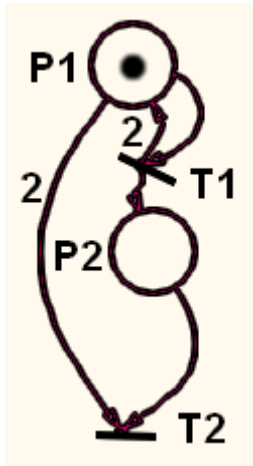
Afin d'obtenir un arbre fini, on utilise le symbole ω pour représenter le nombre de jetons qui peut augmenter sans limite.

Pour "a" entier on peut appliquer les opérations suivantes sur l'opérateur " ω "

$$a < \omega, \quad \begin{cases} a + \omega = \omega \\ \omega - a = \omega \end{cases}$$

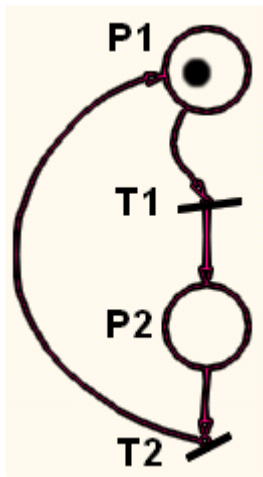
S'il existe un marquage M'' sur le chemin entre M_0 et M' de sorte que $M'(p_i) \geq M''(p_i)$ et $M' \neq M''$ alors remplacer $M'(p_i)$ par ω .

Exemple

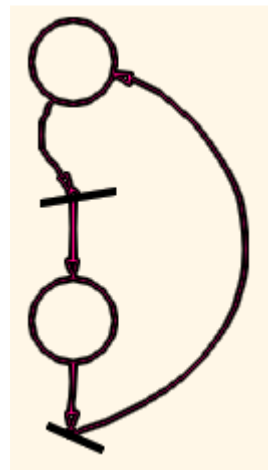


12. Application des RdPs

12.1. Parallélisme



Unité 1

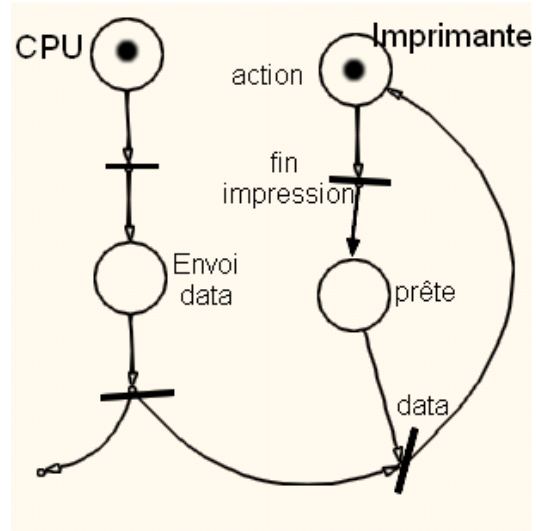


Unité 2

12.2. Synchronisation

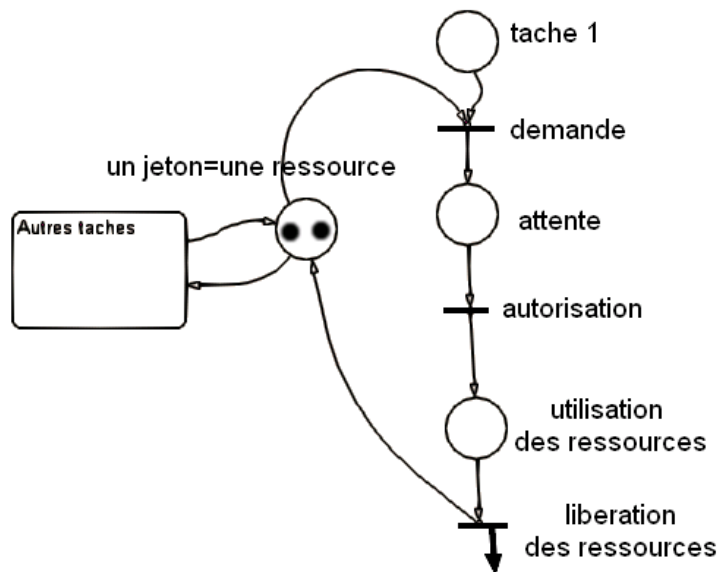


unité 1



Exemple de synchronisation CPU- Imprimante

12.3. Gestion de ressources



13. Caractéristiques principales des réseaux de Petri

- ✓ Distribution des états et des changements d'états dans le réseau
- ✓ Dépendance et indépendance d'ensembles d'événements représentées explicitement (relations de causalité)
- ✓ Représentation à différents niveaux d'abstractions (i.e. détaillés comme abstraits)
- ✓ Vérifications des propriétés possibles car basées sur un formalisme mathématique rigoureux
- ✓ Modélisation simulable
- ✓ Représentation graphique.

14. Conclusion

Plusieurs systèmes se basent sur les réseaux de Petri pour aboutir leurs objectifs, du aux différents avantages qu'ils possèdent. Parmi les quels : la notion de concurremment, l'efficacité de l'analyse, la description du fonctionnement nominal, des défaillances et des mécanismes de reconfigurations.

Mais ceci n'empêche pas que les RDP montre certaines faiblesses comme : manque de modularité, de reutilisabilité, d'entretien, d'où on essaye de régler ces impotences tout en le combinant avec d'autres approches pour satisfaire le but espéré.

Bibliographie

<i>Livre, thèse ou site web</i>	L'auteur, édition
Caractérisation temporelle de scénarios de réseaux de Petri en utilisant la Logique Linéaire	Thèses de F. Girault et L.A. Künzle en 1997
Introduction aux Réseaux de Petri .pdf	J-C. Geffroy
Rapport final de TIPE Réseau de Petri	Auditeur: TRAN Vinh Duc Institut de la Francophonie pour l'Informatique - Promotion 10 15 juillet 2005.
Le réseau de Petri vu comme un ensemble d'automates communicants	Robert Valette LAAS-CNRS Toulouse, version d'avril 2007